配對交易下結構性改變偵測

2018/10/16

大綱

- 傳統時間序列與結構性改變檢定
  - ARIMA模型
  - 模型配適度指標
  - 定態檢定（ADF test）
  - 經典結構性改變檢定（Chow test）
- 基於VECM模型的配對交易
  - 配對交易
  - VECM的共整合關係與檢定（Trace test）
  - VECM的結構性改變檢定（LR test）
- 結構性改變預測
  - 建模時期與信賴區間
  - 範例
- 潛在問題與其他可能

傳統時間序列與結構性改變檢定

ARIMA模型

- 早期的時間序列模型僅考慮數列自身過去資料，以下為ARIMA(1,1,1)模型：

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

- y_t 為時間數列，β_0 為截距項（可省略），β_1 為落後一期自身資料的敏感度，β_2 為落後一期自身殘差的敏感度，ε_t 為當期殘差

- I(d)時間數列：差分d次後定態的時間數列
- 弱定態條件： $E(s_t) = c, Var(s_t) = \sigma^2, Cov(s_t, s_{t-p}) = \gamma_p$

其中c, σ^2, γ_p皆為有限常數項

- 利用增加落後期數來提升配適度，以BIC準則篩選

傳統時間序列與結構性改變檢定

模型配適度指標

- 回歸模型的模型配適度 R^2 在時間序列中並非最佳方法
- 考慮資料量與模型簡化需求，使用Bayesian information準則（BIC or SC,SBC,SBIC）
- 統計量計算公式為： $\omega = T^{-1} \sum \varepsilon_t^2$

$$BIC = Tln(\omega) + kln(T)$$

- T是資料量，k 是估計的參數個數。

傳統時間序列與結構性改變檢定

定態時間數列檢定（ADF test）

- 單根檢定，若一時間數列有單根即為非定態：

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0 \\ H_1 : \delta \neq 0 \end{cases}$$

$$\Delta s_t = \varphi_0 + \varphi_0 t + \delta s_{t-1} + \Delta\phi_1 s_t + \ldots + \Delta\phi_p s_{t-p} + \varepsilon_t$$

- BIC選定最佳 p 期後計算ADF-test 統計量： $ADF - t = \dfrac{\hat{\delta}}{\sqrt{Var(\hat{\delta})}}$

傳統時間序列與結構性改變檢定

經典結構性改變檢定（Chow test）

- 考慮兩個時間數列 s_t，r_t：

$$
\begin{cases}
s_t = \beta_0 + \beta_1 r_t + \varepsilon_t & t = 1,2,\ldots,T \quad (1) \\
s_{at} = \beta_{a0} + \beta_{a1} r_{at} + \varepsilon_{at} & 1 < at < bp \quad (2) \\
s_{bt} = \beta_{b0} + \beta_{b1} r_{bt} + \varepsilon_{bt} & bp + 1 < bt < T \quad (3)
\end{cases}
$$

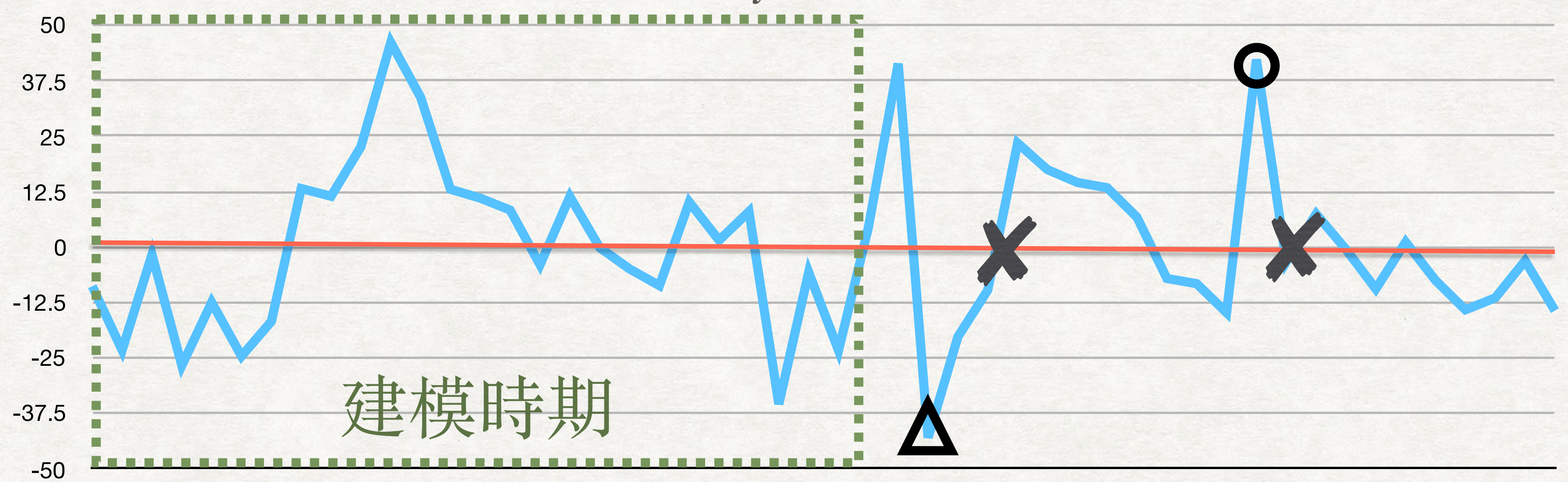
- Equition(1) 是未受限模型，(2),(3) 是受限模型，bp是欲檢測之時間點，ω 是殘差平方和。

$$
F = \frac{\omega_t - \omega_{at} + \omega_{bt} / (k+1)}{\omega_{at} + \omega_{bt} / T - 2(k+1)}
$$

基於VECM模型的配對交易

配對交易

- 配對交易的重點在於持有某一資產並放空某一資產，此投資組合組成的價差序列具有均數回歸特性
- 考慮一價差序列為： $\text{Spread}_t = \widetilde{R}_t - \beta \widetilde{F}_t$



- long $\widetilde{R}_t$ and short $\beta\widetilde{F}_t$ at △ then close at ✗
- long $\beta\widetilde{F}_t$ and short $\widetilde{R}_t$ at ○ then close at ✗

基於VECM模型的配對交易

VECM

- VECM模型可由VAR(p),p>1模型改寫而來，VECM與VAR皆是多變量時間序列模型，考慮一個VAR(p)如下：

$$z_t = \begin{bmatrix} R_t \\ F_t \end{bmatrix} \qquad z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i z'_{t-i} + u_t \quad ,1 \le t \le T - p$$

- 可改寫成以下的VECM模型，其中 Π 為共整合向量：

$$\Delta z_t = \Pi z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} D_i \Delta z_{t-i} + \epsilon_t \quad ,1 \le t \le T - p$$

Rank(Π) $= K - r$ 在目前的例子中K-r=1，並可分解 Π 為

$$\Pi z_{t-1} = AB' z_{t-1}$$

$$\text{Spread}_t = B' z_{t-1}$$

基於VECM模型的配對交易

VECM的共整合關係與檢定

- 共整合關係：當兩個以上的I(1)時間數列進行線性組合後若成為一個I(0)時間數列，則此現象稱為共整合關係，VECM中 Π 的秩個數 r 即為資料中共有 r 組共整合關係。
- 共整合檢定(Johansen test)：檢定共整合向量的秩，有兩種統計量，在此我們以跡檢定(trace test)為例：

$$\begin{cases} H_0 : \text{cointegration rank less than or equal to } r \\ H_1 : \text{cointegration rank less than or equal to } K \end{cases}$$

- 假定 Π 有k個特性根 $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ，統計量為 $\lambda_{trace}(r) = -T \sum_{i=r+1}^{K} ln(1-\lambda_i)$

$$tr\left(\int_0^1 \Delta W_t W_t' \left(\int_0^1 W_t W_t \Delta t\right)^{-1} \int_0^1 W_t \Delta W_t'\right)$$, W_t is Brownian motion

基於VECM模型的配對交易

VECM的結構性改變檢定

- Hansen(2003) 沿用了Chow test的檢定框架，但是不使用 F test改用 Likelihood Ratio test(LR test) 並推導證明在資料夠大時會近似 χ^2

$$\begin{cases} \Delta z_{at} = \Pi z_{at-1} + \sum_{i=1}^{p-1} D_{ai} \Delta z_{at-i} + \epsilon_{at} & ,1 \le at \le bp \\ \Delta z_{bt} = \Pi z_{bt-1} + \sum_{i=1}^{p-1} D_{bi} \Delta z_{bt-i} + \epsilon_{bt} & ,bp + 1 \le bt \le T - p \end{cases}$$

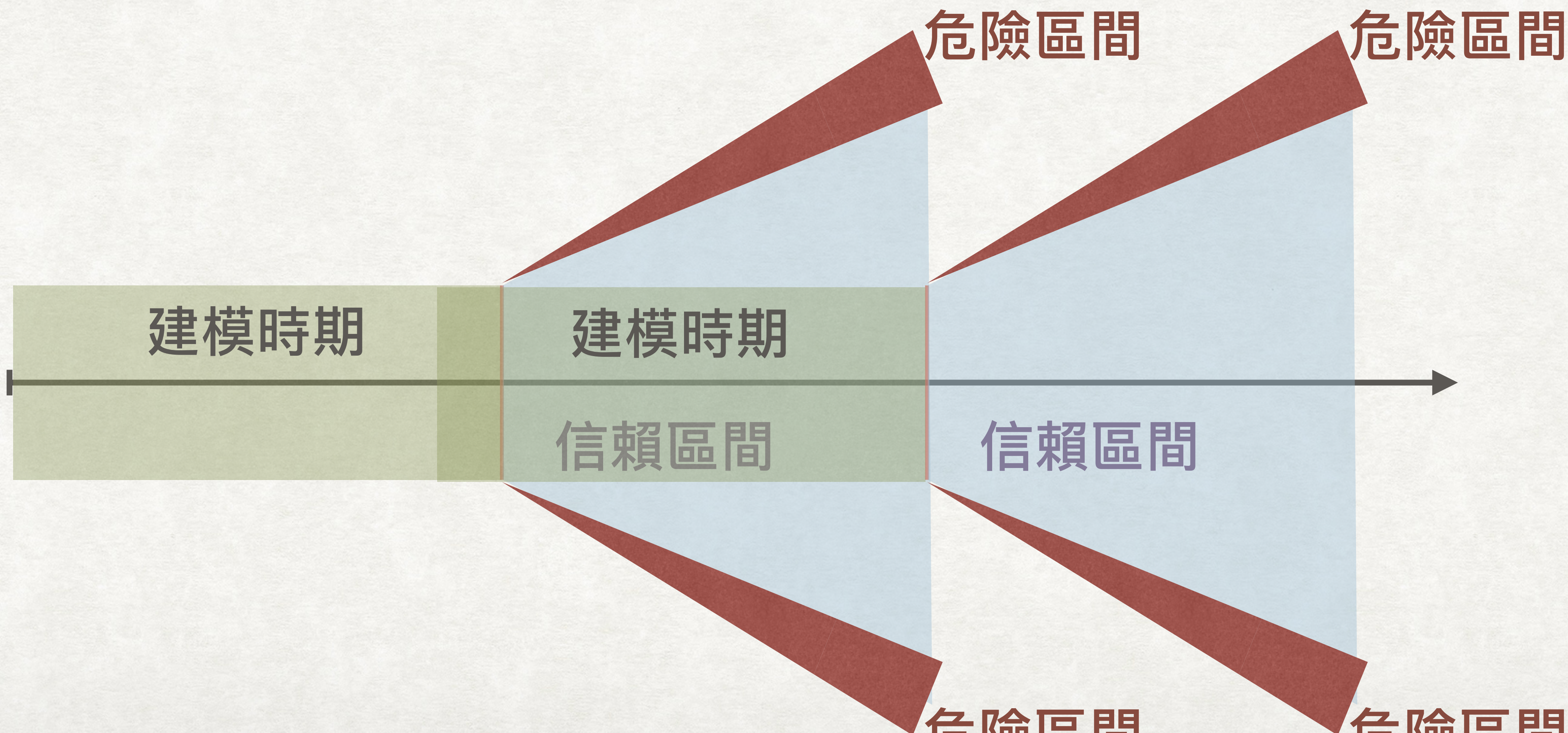
$$L_{max}(\hat{A}, \hat{B}, \hat{D}, \hat{\Omega}) = (2\pi e)^p \hat{\Omega} \qquad \hat{\Omega} = \sum \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_t'$$

- LR統計量： $\chi^2 = -2(log(\hat{\Omega}_t) - log(\hat{\Omega}_{at} + \hat{\Omega}_{bt}))$
- LR自由度： $r(k-r) + rk + (p-1)k^2$

結構性改變預測

建模時期與信賴區間

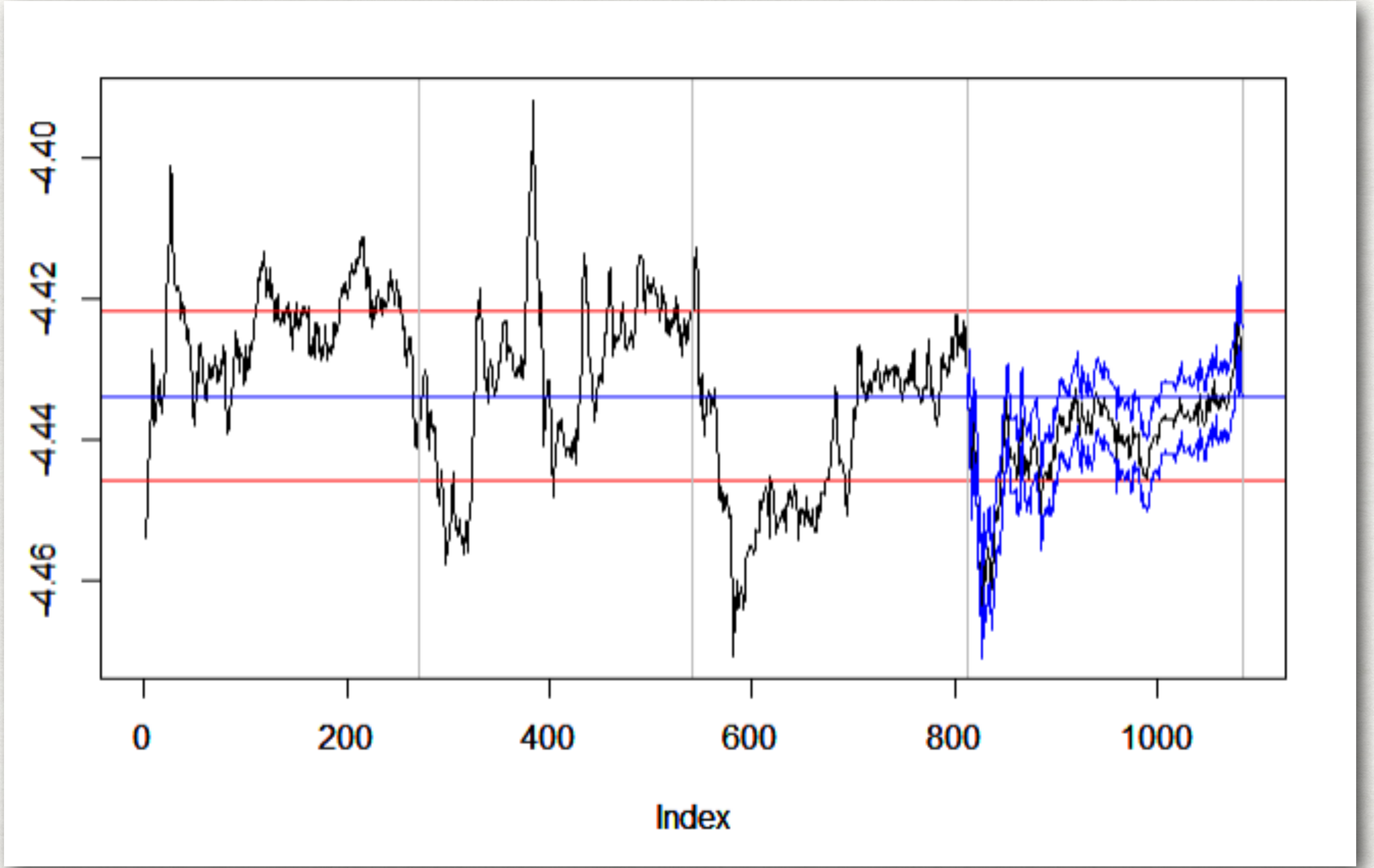
- 先在建模時期配適VECM模型得到spread數列
- 配適spread的ARIMA模型，建構未來n筆的信賴區間與危險區間
- 建模時期內VECM模型以LR test，ARIMA模型以Chow test檢定結構性改變
- 如果spread連續觸碰到危險區間，視為發生結構改變
- 建模時期採移動窗格(moving window)的方式更新資料



結構性改變預測

2481 vs 9938

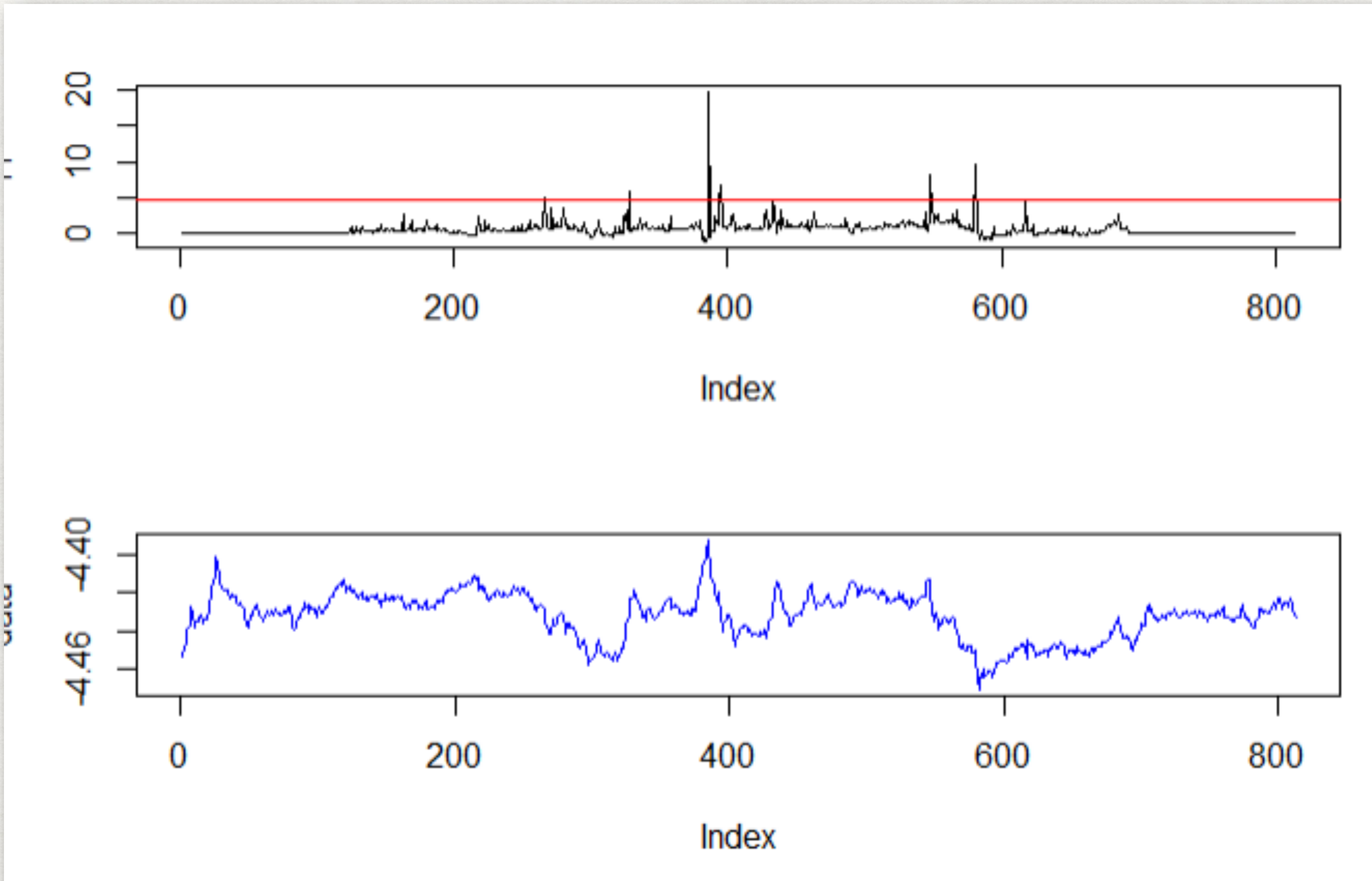
- 以 8/1 (三)- 8/3(五) 為建模時期，共813筆資料（ARIMA(4,0,0)）
- 8/6(一) 即時偵測結構性改變共271筆資料(95%信賴區間)



結構性改變預測

2481 vs 9938

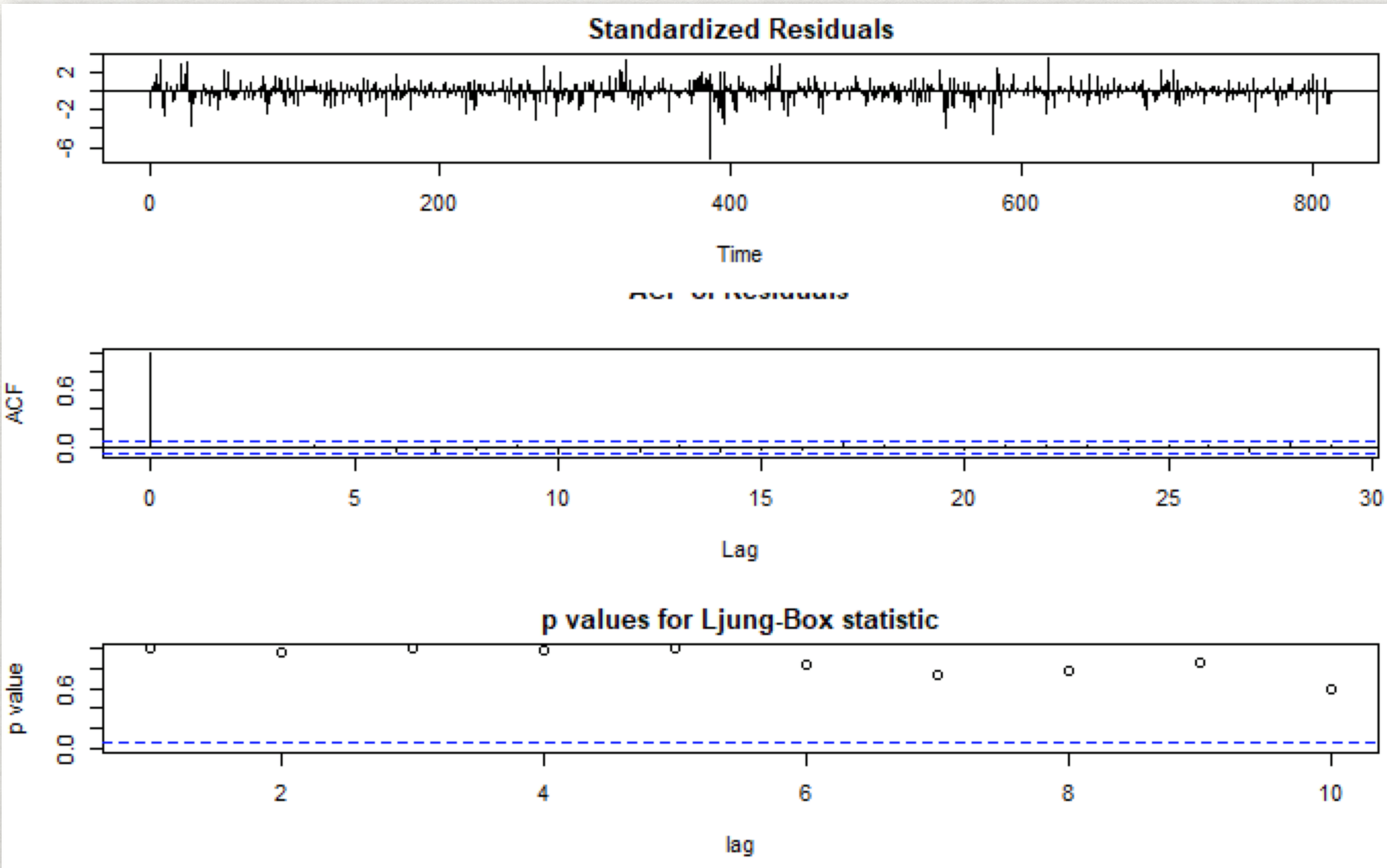
- **建模時期結構性改變檢定，共有8個斷裂點**



結構性改變預測

2481 vs 9938

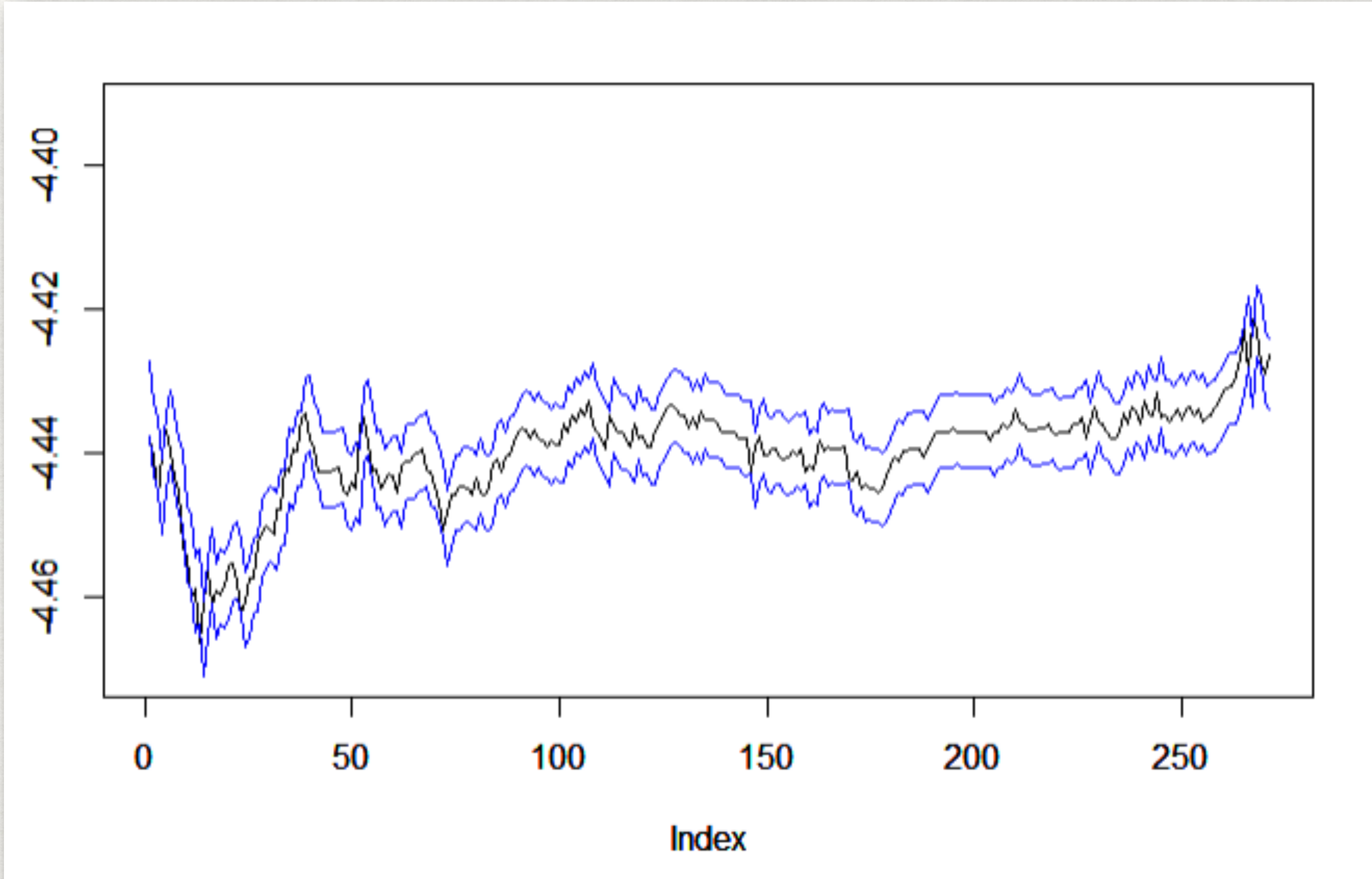
- **建模時期殘差檢定**



結構性改變預測

2481 vs 9938

- 每當資料新增一筆則更新建模時期，8/6(一) 觸及危險區間11次



潛在問題與其他可能

- 建模時期與未來n筆不易決定
- Spread 配適ARIMA模型後若殘差具有下列三個問題1.非常態、2.有自我相關、3.異質變異數，信賴區間估計能力不佳
- 日內資料換日時，盤前資訊可能有隱藏訊息，且換日時發生結構性改變很正常
- VECM或VAR模型可能也能作信賴區間